المحاضرة السابعة

تابع اللوغاريتم العقدي:

تعريف: نقول عن عددٍ عقدي b إنّه لوغاريتم لعدد عقدي غير معدوم a ونكتب $b = log\ a$ إذا كان $e^b = a$.

من الواضح أن $log\ 0$ غير معرّف، وإذا كان $b = log\ a$ فإنّ $b + 2\pi ki = log\ a$ لأجل أي عدد صحيح k. حيث أن:

$$e^{b+2\pi ki} = e^b = a$$

وهذا يعني أنّ لـ $log\ a$ عددا غير منته من القيم.

مثال: $log(1+i) = ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$ لأنّ:

$$e^{ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)} = e^{ln\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$$

التابع اللوغاريتمي العقدي:

نُسمّي التابع الذي يقرن كل z من $\mathbb{C}^*$ بلوغاريتمه، التابع اللوغاريتمي العقدي ونرمز له بـ log ، أي أنّ:

$$log: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} :\ z \longrightarrow w = log\ z$$

هذا التابع متعدد قيم (بل لانهائي القيم).

إيجاد الجزأين الحقيقي والتخيلي لتابع اللوغاريتم العقدي:

لتكن $w = log\ z = u + iv$، عندئذٍ فإنّ:

$$w = log\ z \Leftrightarrow e^w = z \Leftrightarrow e^{u+iv} = |z|e^{iArg\,(z)}$$

$$\Leftrightarrow e^u = |z|\ \ ,v = Arg\,(z) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$$

بما أنّ $|z| > 0$، إذن u موجود وبالتالي:

$$log\ z = w = u + iv = ln\,|z| + i(Arg\,(z) + 2\pi k)\ \ : k \in \mathbb{Z}$$

هذه المساواة تبيّن أنّ لـ $log\ z$ عددا غير منتهٍ من القيم، كل قيمة لـ k تعطي قيمة لـ $log\ z$ تسمى القيمة الموافقة لـ k . تسمى القيمة الموافقة لـ $k = 0$ بالقيمة الرئيسية لـ $log\ z$ ويرمز لها بـ $Log\ z$. على سبيل المثال $Log(1+i) = ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

فروع التابع اللوغاريتمي غير التحليلية:

إذا ثبتّنا k في قاعدة ربط $log\ z$ السابقة نحصل على تابعٍ وحيد القيمة، ولنرمز له بـ g_k .
فإذا كان k_0 عددا صحيحاً كيفياً مثبتاً فإنّ التابع $g_{k_0}: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرف بالمساواة:

$$g_{k_0}(z) = ln|z| + i\,(Arg\,(z) + 2\pi k_0) \ldots (*)$$

وحيد القيمة، نُسمّيه فرعاً غير تحليلي لتابع اللوغاريتم العقدي log.

كما نُسمّي أي تابع f_α معرّف على $\mathbb{C}^*$ بالشكل:

$$f_\alpha(z) = \ln|z| + i(\theta) : \ \theta = \arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$$

وحيث α ثابت حقيقي كيفي، فرعاً غير تحليلي لـ log. من الواضح:

$$g_0(z) = \ln|z| + i(Argz + 2\pi(0)) = f_{-\pi}(z)$$

لأنّ:
$$f_{-\pi}(z) = \ln|z| + i\theta : \theta \in]-\pi, \pi[$$

المستقر الفعلي لـ g_0:

$$g_0(z) = Log\,(z) = ln|z| + i\left(Arg\,(z)\right)$$

ونلاحظ أنّه إذا مسحت z المجموعة $\mathbb{C}^*$ (منطلق g_0) فإن الجزء الحقيقي $\mathrm{u} = \ln|z|$ لـ g_0 سيمسح المجال $]-\infty, \infty[$ ، وإن جزءه التخيلي $v = Arg\,(z)$ سيمسح المجال $]-\pi, \pi]$. بالنتيجة: ستمسح $g_0(z)$ الشريط الأفقي:

$$S_0 = \{\mathrm{w} \in \mathbb{C} : Imw \in]-\pi, \pi]\}$$

وهو الشريط المحصور بين المستقيمين الأفقيين $Im\,(w) = -\pi$ (حافة سفلى)، $Im\,(w) = \pi$ (حافة عليا) مع حافته العليا ودون السفلى. يُسمى هذا الشريط الشريط الرئيسي في المستوي.

تمرين مهم: أثبت أنّ f_α غير مستمر عند أي نقطة من D_α، حيث D_α هو نصف المستقيم $\arg(z) = \alpha$ مع المبدأ، أي:

$$D_\alpha = \{\mathrm{z} \in \mathbb{C} : \mathrm{arg}z = \alpha \ \vee z = 0\}$$

الحل: ليكن $z_0 \in D_\alpha$، عندئذٍ نميّز الحالتين:

1) إذا كان $z = 0$، فإنّ f_α غير مستمر عند z_0، لأنّ f_α غير معرّف عندها.
2) إذا كان $z \neq 0$،، عندئذٍ فإنّ $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$ وإنّ:

$$f_\alpha(z_0) = \ln|z_0| + i(\alpha + 2\pi)$$

لنأخذ $z = |z_0|e^{i(\alpha+\epsilon)} \notin D_\alpha$ ، عندئذ $z \in c(0, |z_0|)$ ، حيث $c(0, |z_0|)$ الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها $|z_0|$، وإنّ:

$$f_\alpha\,(z) = \ln|z_0| + i(\alpha + \epsilon)$$

بجعل ϵ تسعى إلى الصفر وهذا يكافئ أن z تسعى إلى z_0، و النهاية $\lim\limits_{z \to z_0} f_\alpha(z)$ في حال وجودها يجب أن تساوي:

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\ln|z_0| + i(\alpha + \epsilon)) = \ln|z_0| + i(\alpha) \neq f_\alpha\,(z_0)$$

ومنه f_α غير مستمر عند z_0.

نتيجة: إنّ جميع التوابع f_α (فروع التابع اللوغاريتمي) معرفة على $\mathbb{C}^*$ إلا أنها غير مستمرة وبالتالي غير تحليلية على $\mathbb{C}^*$ لعدم استمرار f_α عند نقاط D_α، ولذلك سميت فروعا غير تحليلية للتابع اللوغاريتمي.

فروع التابع اللوغاريتمي التحليلية:

مبرهنة: إنّ التابع $L_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{C}\backslash D_\alpha}$ تحليلي على المنطقة $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ لأجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$، وإنَّ:

$$L'_\alpha(z) = \frac{1}{z} : \forall z \in \mathbb{C}\backslash D_\alpha$$

حيث $f_\alpha|_{\mathbb{C}\backslash D_\alpha}$ هو مقصور f_α على $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$.

الإثبات:

لنأخذ التابع $h_\alpha = e^z|_{S_\propto}$ حيث $S_\propto$ هو الشريط الأفقي:

$$S_\propto =]-\infty,\infty[\times i]\alpha,\alpha+2\pi[= \{w \in \mathbb{C} : \propto < Im\,(w) < \propto + 2\pi\}$$

إن صورة الشريط $S_\propto$ وفق e^z وبالتالي وفق h_α هي $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ وإن المستقر الفعلي لـ L_α هو $S_\propto$. (أثبت ذلك). وكما أنّ:

$$L_\alpha\big(h_\alpha(z)\big) = f_\alpha(e^z) = ln|e^z| + i\theta \;:\; \theta = (arg\,e^z) \in\;]\alpha,\alpha+2\pi[$$
$$= ln(e^{Rez}) + iIm\,(z) = x + iy = z$$

أي أن $L_\alpha\big(h_\alpha(z)\big) = z$ لأجل كل z من $S_\propto$. كذلك لأجل كل z من $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ لدينا:

$$h_\alpha(L_\alpha(z)) = e^{(L_\alpha(z))} = e^{(f_\alpha(z))} = e^{ln|z|+i\theta} \;:\; \theta = arg z \epsilon\;]\alpha,\alpha+2\pi[$$
$$= e^{ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$$

مما سبق نجد أن L_α هو التابع العكسي لـ h_α .

وحسب المبرهنة التي نصها: " إذا كان f تقابلاً قابلاً للاشتقاق عند w و $f'(w) \neq 0$ فإنّ تقابله العكسي g قابل للاشتقاق عند $z = f(w)$ وإنّ: $g'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{f'(g(z))}$"، نجد أنّ L_α قابل للاشتقاق على المجموعة المفتوحة $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ ، وبالتالي تحليلي عليها، وأن :

$$L'_\alpha(z) = \frac{1}{h'_\alpha\big(L_\alpha(z)\big)} = \frac{1}{e^{L_\alpha(z)}} = \frac{1}{z}$$

حيث أنّ h_α تقابل قابل للاشتقاق على $S_\propto$ و $h'_\alpha(z) = e^z \neq 0$ لأجل كل z من $S_\propto$.

تسمية: نُسمّي كل تابع L_α (α حقيقي كيفي مثبت) فرعاً تحليلياً على $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ للتابع اللوغاريتمي $log z$. وبشكل خاص، لأجل كل عدد صحيح k نُسمّي التابع $L_{\propto=-\pi+2\pi k}$ فرعاً تحليلياً لـlog موافقاً لـ k .

الفرع الرئيسي للتابع اللوغاريتمي:

يُسمّى الفرع الموافق لـ $k = 0$ الفرع الرئيسي لـ log ، ويرمز له بـ Log . أي أنّ:

$$Log : \mathbb{C}\backslash ox^{-} \longrightarrow \mathbb{C} : \quad Log\, z = \ln|z| + i\, Arg\,(z)$$

حيث أن $D_{\alpha=-\pi} = ox^{-}$ (الجزء غير الموجب من المحور ox).

إنّ قيمة فرع اللوغاريتم الرئيسي عند $1+i$ هي: $Log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$

بينما اللوغاريتم لـ $1+i$ يعطى بـ:

$$log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

ملاحظة:

إنّ اقتطاع نصف المستقيم D_α من المستوي العقدي يمنع الدوران دورة كاملة حول المبدأ، أي يمنع الانطلاق من أي نقطة $z \in \mathbb{C}\backslash D_\alpha$ والعودة إليها بدورة كاملة حول المبدأ دون الخروج من $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ أي دون قطع D_α. حيث أنّ هذه الدورة لو تمّت لحصلنا على قياسٍ جديد لزاوية z مغايرة لتلك المسموح بها في الفرع L_α، لذلك نُسمّي المبدأ نقطة تفرع التابع log، ونُسمّي D_α مستقيم تفرع للتابع log.

بشكل عام، إنّ اقتطاع أي منحن مستمر C بدايته مبدأ الإحداثيات ويذهب إلى اللانهاية دون أن يقطع نفسه سيمنع الانطلاق من أي نقطة $z \in \mathbb{C}\backslash C$ والعودة إليها بدورة كاملة حول المبدأ دون الخروج من $\mathbb{C}\backslash C$، لذلك نُسمّي المنحني C منحني تفرع.

نتيجة:

يكون لـ log فرع تحليلي على منطقةٍ G جزئية من $\mathbb{C}$، إذا تحقّقت الخاصة التالية:

لا يمكن الانطلاق من أي نقطةٍ z من G والعودة إليها بدورة كاملة حول المبدأ دون الخروج من G.

تمرين: إذا كانت G منطقة لا تحوي Ox^{-}، فهل يوجد فرع للتابع اللوغاريتمي تحليلي عليها؟

نعم يوجد فرع تحليلي لأنّه لا يوجد أي نقطة من G يمكن الانطلاق منها والعودة إليها بدورة كاملة حول المبدأ دون عبور Ox^{-}، أي دون الخروج منها.

ملاحظة:

إنّ نقاط التفرع لتابعٍ معرّف بعلاقة من الشكل:

$$f(z) = log\big(g(z)\big)$$

، حيث g تابع وحيد القيمة، هي أصفار g أي هي حلول المعادلة $g(z) = 0$.

لـ f فروع تحليلية على أي منطقة لا يمكن الانطلاق من أي نقطة منها والعودة إليها بدورة كاملة حول أي نقطة تفرع لـ f دون الخروج من تلك المنطقة، والمشتق لأي فرع لـ f على مثل تلك المنطقة يُعطى المساواة:

$$f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

...انتهت المحاضرة السابعة..